Nel mondo quotidiano dei poliedri

Silvia Sbaragli
NRD, Bologna

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Sbaragli S. (2002). Nel mondo quotidiano dei poliedri. *La Vita Scolastica.* Laboratori nel fascicolo di Area matematica. 15, 44-48.

Nella prassi didattica è assai diffuso trattare lo studio della Geometria partendo dalle figure in due dimensioni per poi passare successivamente alle figure in tre dimensioni. È sicuramente vero che la geometria dello spazio presenta, da un punto di vista adulto, maggiori difficoltà di sistemazione razionale rispetto alla geometria del piano, ma l'idea di figura piana è certamente più sofisticata, da un punto di vista concettuale, di quella di figura solida; in effetti è bene tener presente che l'esperienza concreta del bambino avviene nello spazio tridimensionale, tutto ciò che lo circonda è in tre dimensioni: i suoi giochi, l'arredamento della sua aula, la penna che tiene in mano; per questa ragione acquista un forte significato didattico coinvolgere i bambini in attività che partano da figure solide per poi considerare figure piane.
Nel presentare questa esperienza non si sottovaluta il fatto che ogni figura geometrica, sia piana che solida, è sempre frutto di un'astrazione per quanto concerne la matematica: nessuna figura geometrica esiste nella realtà!, ma si tiene presente che concettualmente risulta più intuitivo trattare le figure solide, piuttosto che le piane, ed è su questo che si basa la nostra proposta.

1. Giochiamo con i solidi

Per avviare questa attività, in modo motivante e divertente, si può chiedere ai bambini di portare a scuola diversi tipi di solidi: scatole, contenitori, pezzi di costruzioni, con i quali si può giocare liberamente e si possono fare le prime osservazioni basate sulle diverse forme delle figure solide. È bene manipolarle, farle rotolare per scoprire ad esempio che il cilindro ha qualcosa di diverso dal parallelepipedo: il primo rotola con facilità, il secondo lo fa con qualche difficoltà in più. Perché si verifica questo? I bambini iniziano così a notare che c'è qualcosa che li caratterizza e al quale conviene dare un nome: sono gli *spigoli*. Ma in alcuni solidi vi sono anche delle punte, che sono dette *vertici,* e poligoni che formano la superficie del solido che si possono chiamare *facce*, dove è anche possibile disegnare.
Per tutti i solidi a disposizione si cercano relazioni e si focalizza l'attenzione sui *poliedri* che sono caratterizzati dai vertici, dagli spigoli e dalle facce legati tra loro dalle seguenti relazioni:

- i lati delle facce non sono altro che gli spigoli;

• uno spigolo collega sempre due vertici; oppure detto in un altro modo: gli estremi degli spigoli si
chiamano vertici;

• si ottiene un vertice se in esso concorrono *almeno* tre facce;

• in ogni spigolo concorrono sempre due facce; oppure detto in un altro modo: due facce che si incontrano, formano uno spigolo.

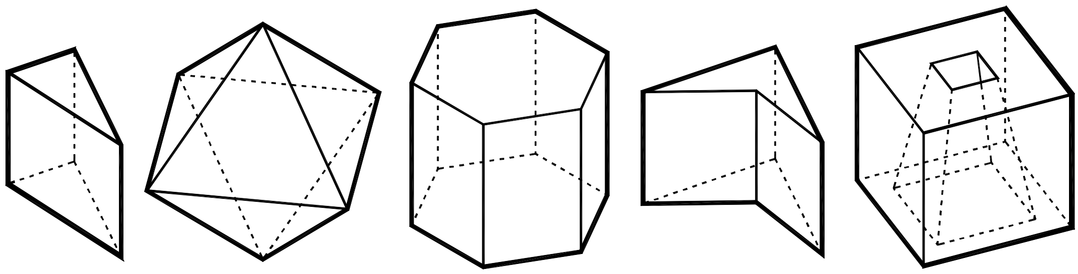
Le relazioni sono davvero tante e si possono esprimere in diversi modi; si scopre così, pian piano, il fantastico mondo dei poliedri.

2. Costruiamo i poliedri

Con stuzzicadenti di varie lunghezze e pongo si possono costruire tanti solidi (ovviamente le palline di pongo rappresentano i vertici, mentre gli stuzzicadenti costituiscono gli spigoli); con questo procedimento è possibile ottenere solamente i *poliedri*, mentre non si riescono a costruire coni, cilindri e sfere. Questi ultimi si potranno realizzare utilizzando unicamente il pongo.

Tra tutti i poliedri “scheletrati” così costruiti si potranno notare i cosiddetti *poliedri convessi*, cioè quelli che sono anche figure convesse (senza buchi, né rientranze); intuitivamente un poliedro è convesso quando si può appoggiare sul tavolo su una qualunque delle sue facce (come una scatola da scarpe), ma questo non vale per tutti.

Inizia così la caccia ai poliedri convessi; tra i cinque rappresentati in figura solamente tre lo sono.



Da questo momento in poi l’attenzione va rivolta principalmente ai poliedri convessi, che risultano più interessanti ed usuali; sono davvero tanti: prismi, parallelepipedi, piramidi, tronchi di piramidi… , ci si può veramente sbizzarrire!

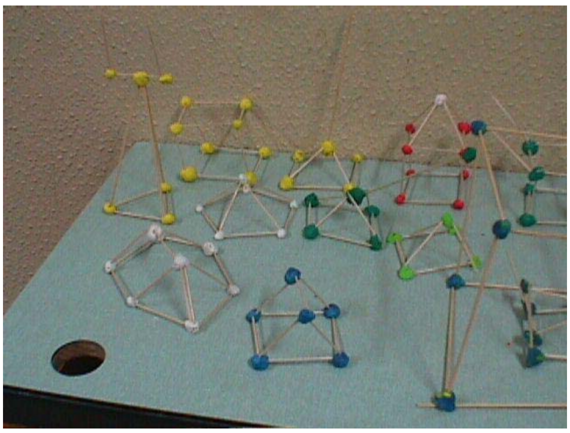
Questa attività fornisce l’occasione per osservare le differenze tra i vari poliedri, ad esempio si scopre che nel parallelepipedo gli spigoli hanno lunghezze diverse: si sono utilizzati 4 stuzzicadenti da spiedino e 8 da tavolo; mentre nel cubo gli spigoli, ossia gli stuzzicadenti, hanno tutti la stessa lunghezza. Eh sì, entrambi hanno lo stesso numero di vertici, di spigoli e di facce, ma la forma delle facce cambia a seconda degli stuzzicadenti che si usano.

Facendo questa esperienza è anche possibile che si verifichi l’occasione di trattare le similitudini; in effetti se per realizzare ad esempio un cubo un bambino può disporre di stuzzicadenti da spiedino, mentre il compagno di stuzzicadenti da tavolo, si otterranno due solidi simili, cioè aventi la stessa forma (il cubo), ma di dimensioni diverse.

Ovviamente la costruzione dei poliedri può avvenire anche con materiale diverso: ceci o piselli al posto del pongo, cannucce e nettapipe, materiale strutturato per creare poliedri con un gran numero di facce. Anche con questi materiali è possibile ottenere poliedri “scheletrati”, che possono quindi essere guardati “all’interno”, mettendo così in risalto il numero dei vertici e degli spigoli, e lasciando solo all’immaginazione il numero delle facce. Risulta, però, molto significativo affiancare a questa attività l’usuale costruzione di solidi realizzata con il cartoncino dove l’attenzione è concentrata sul numero di facce, mentre si dà meno risalto ai vertici e agli spigoli. Avendo entrambi i modelli a disposizione, risulta facile per i bambini individuare il numero di elementi che caratterizzano i solidi realizzati.
Questa divertente attività si può organizzare seguendo varie fasi.

3. Le fasi di lavoro

1. Gioco libero. Con le palline di pongo e gli stuzzicadenti a disposizione si costruiscono vari solidi di fantasia; questa è una ricca occasione per sbizzarrirsi: si realizzeranno oltre ai consueti cubi e parallelepipedi, anche case, castelli, torri che molto spesso non sono altro che solidi sovrapposti.
2. Si fornisce un modello tridimensionale di poliedro, già costruito dall’insegnante con pongo e stuzzicadenti, e si chiede ai bambini di riprodurlo. È bene osservare di quanti vertici (ossia quante palline di pongo), di quanti spigoli (ossia di quanti stuzzicadenti) e di quante facce (che si devono immaginare) è formato il nostro poliedro. In questa fase si passa da un modello tridimensionale ad un altro sempre tridimensionale; si continua cioè a lavorare in tre-dimensioni.[1]
3. La fase precedente si può realizzare dando questa volta come modello un solido pieno, come ad esempio una scatola, e chiedendo ai bambini di realizzare lo stesso solido, cioè della stessa forma ma “scheletrato”, ottenuto cioè utilizzando stuzzicadenti e pongo.
4. L’attività si può complicare sempre più… si può chiedere ai bambini di costruire con pongo e stuzzicadenti, il disegno che vedono rappresentato su un foglio; si passa così dall’osservazione del progetto bidimensionale alla sua realizzazione tridimensionale. Si farà così la conoscenza di un numero sempre maggiore di poliedri, per i quali occorre valutare il numero di vertici, di



[1] L’attività riportata nelle fotografie è stata realizzata presso la scuola elementare “Gabriella Degli Esposti” di Calcara (Bologna).

spigoli e di facce che sono gli elementi che li caratterizzano.

5. Un'ulteriore fase che si può aggiungere è di chiedere ai bambini di costruire un certo poliedro, ad esempio un cubo o una piramide a base quadrata, senza dare né un modello tridimensionale, né un disegno bidimensionale: la consegna è solo orale. Questo comporta il dover conoscere il modello proposto, il saperselo immaginare con "gli occhi della mente" per focalizzare gli elementi che lo caratterizzano e, in base a questo… saperlo riprodurre.
6. Passiamo ora dal tridimensionale al bidimensionale: partendo da un modello di poliedro tridimensionale costruito dai bambini si chiede di rappresentarlo sul foglio, di crearne cioè un progetto bidimensionale. Questa fase richiede una certa capacità di astrazione e diverse abilità di tipo grafico che coinvolgono anche problemi prospettici; è per questa ragione che risulta importante, in questa fase, che ogni bambino disponga personalmente del modello da osservare e da posizionare nel modo prospettico più favorevole per individuare tutti gli elementi che lo formano.

4. La straordinaria formula di Eulero per i poliedri

È possibile effettuare una bella mostra dei poliedri costruiti e per ognuno di questi si potrà scrivere, in una tabella realizzata su un cartellone, il numero di vertici v, di facce f e di spigoli s come è indicato di seguito.

Tipo di poliedro	***v***	***f***	***s***
tetraedro	4	4	6
cubo	8	6	12
parallelepipedo (scatola da scarpe)	8	6	12
piramide a base quadrata	5	5	8
prisma a base pentagonale	10	7	15
tronco di piramide a basi esagonali	12	8	18

Ed ora inizia il bello! Si deve cercare se esiste una relazione tra i numeri v, f e s.
Di solito i bambini focalizzano l'attenzione su alcune caratteristiche che però non sono generali per tutti i poliedri (come ad esempio che i numeri sono tutti pari, ma questo non vale ad esempio per la piramide a base quadrata); quindi, se non si ha la fortuna di avere subito un astuto osservatore che scopre la regola, si può consigliare ai bambini di provare a sommare qualcosa e semmai anche di sottrarre qualcos'altro, così fatalmente a un certo punto qualcuno affermerà: «Ma c'è un 2; fa sempre 2!».

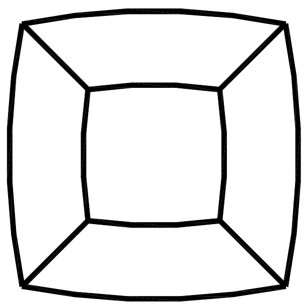
In effetti se si osservano attentamente i tre numeri per ogni figura solida, si scopre che per ogni poliedro vale la famosa relazione: $v + f - s = 2$ (oppure detto in un altro modo, forse più agevole per i bambini, $v + f = s + 2$).
Questa relazione è detta "formula di Eulero per i

poliedri", in effetti anche se fu trovata da Cartesio nel 1619, non fu da lui dimostrata e i suoi calcoli andarono perduti; solo un secolo più tardi Leonhard Euler (1707-1783) scoprì la formula e ne fornì la dimostrazione.
A questo punto può risultare simpatico per i bambini vedere finalmente il volto di un matematico, che troppo spesso è immaginato come un personaggio misterioso, forse mai esistito.

La scoperta della relazione di Eulero risulta assai interessante e punto di partenza per profonde riflessioni; in effetti un bambino a cui non si è data occasione di riflettere su questo, è convinto di poter costruire qualsiasi figura geometrica, ad esempio poliedri a piacere, senza dover rispettare nessuna restrizione implicita; per questo se gli si chiede di costruire un poliedro convesso avente tre vertici, tre spigoli e tre facce egli crederà di poterci riuscire, tenterà varie volte, finché non è costretto a rinunciarci (dato che non è possibile ottenerlo). Invece un bambino avvertito del fatto che tutti i poliedri convessi sono sottoposti alla relazione di Eulero, controllerà i valori che gli sono stati forniti e, in modo critico, potrà accorgersi che non è possibile riuscirci.

5. La formula di Eulero funziona anche nel piano

Questa relazione non vale solo nello spazio ma anche nel piano. Se si realizza ad esempio un cubo "scheletrato" in modo che gli spigoli siano costituiti da molle agganciate tra loro e successivamente si schiaccia sul tavolo in modo che tutte le molle vadano ad aderire sul tavolo, si otterrà la seguente immagine:

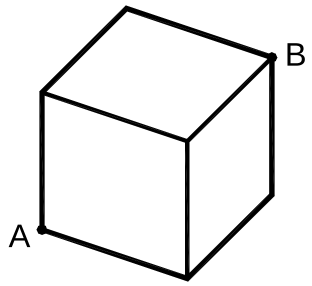


Quelle che erano *facce* nello spazio diventano *regioni* nel piano, i *vertici* dello spazio diventano *nodi* nel piano, infine gli *spigoli* diventano *tratti di confine* o *confini* nel piano.
Si possono quindi fare osservazioni cercando le analogie con lo spazio: le regioni sono attorniate da tratti di confine che sono le linee che uniscono due nodi; i nodi sono solo i punti dai quali escono *almeno* tre tratti di confine…
Se si contano il numero di regioni r, di tratti di confine c e di nodi n per la figura piana che si è ottenuta schiacciando il cubo, si avrà che r è 6 (va contata anche la regione esterna), n è 8 e c è 12, quindi vale l'uguaglianza: $r + n = c + 2$.
Si scopre che questa relazione non vale solo per il cubo schiacciato, ma per tutte le mappe convesse del piano ed è detta "formula di Eulero per le mappe"; risulta interessante scoprire che la stessa regola vale sia per lo spazio che per il piano.
Ancora una volta si può creare una situazione problematica impossibile: «Disegnate una mappa che sia formata da 4 regioni, 5 nodi e 8 confini». Occorre

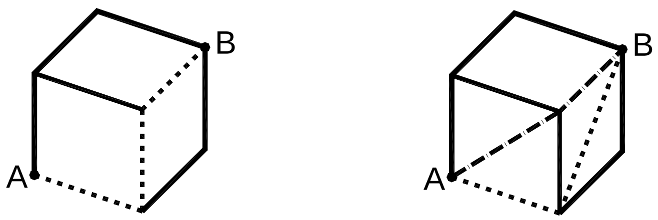
provare un bel po' prima di scoprire che non è possibile ottenerla; ma si può sempre scegliere di controllare se i numeri degli elementi forniti, soddisfano la relazione di Eulero: se ciò non avviene, non è possibile disegnare la mappa secondo le indicazioni date.

6. Cammini minimi sui poliedri

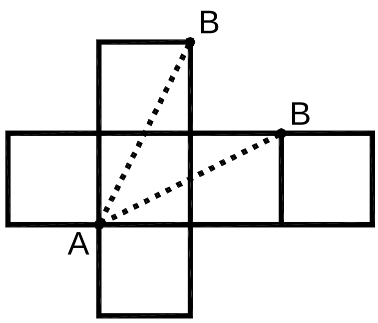
Con i poliedri costruiti, si possono realizzare tante situazioni problematiche. Ad esempio si può considerare un cubo "scheletrato" e dopo aver individuato due suoi vertici opposti, A e B come in figura, si può inventare la storia di una formichina che vuole andare da un vertice all'altro facendo il *cammino minimo* (ossia la strada più corta). Si chiede quindi ai bambini di trovare una di queste strade e di stabilire quanto è lunga; si scoprirà che il cammino minimo è pari a tre volte la lunghezza del lato e che di questi cammini ce ne sono in tutto sei.



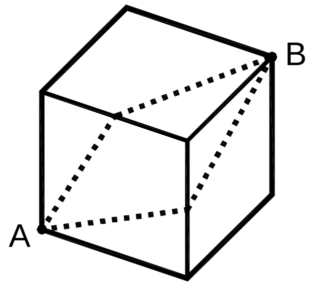
Che cosa succede se invece del cubo "scheletrato", si considera il cubo pieno realizzato con il cartoncino? Qual è il cammino più corto sulla superficie del cubo per andare dal vertice A al vertice B? Questa volta non è così semplice come appare a prima vista; i bambini tenderanno ad indicare uno dei cammini tratteggiati in figura o uno analogo, ma questi non rappresentano i percorsi più brevi.



Per scoprire uno dei cammini minimi sulla superficie del cubo per andare dal vertice A al vertice B, occorre come prima cosa "aprire" il cubo e distenderlo in modo da ottenere lo *sviluppo* del cubo (passando così dalle tre dimensioni alle due dimensioni) e, dopo aver individuato dove sono posizionati i due vertici A e B, si potrà disegnare la strada più corta come è indicato in figura.



Dopo aver richiuso il cubo si scopre…, sorpresa delle sorprese!, che il cammino minimo questa volta è davvero inaspettato e ancora una volta non è unico.



Si può così continuare l'attività considerando i vari sviluppi dei poliedri (passando cioè dallo spazio al piano) e divertendosi con i cammini minimi su parallelepipedi, cilindri, sfere…, oppure si può cercare di individuare i cinque poliedri regolari per approfondire sempre più questo affascinante tema.

Prerequisiti
Per realizzare la prima parte di questo laboratorio non occorrono abilità particolari, né competenze specifiche, è sufficiente solo un po' di manualità. A mano a mano che si procede, però, ci si serve degli strumenti appresi nelle fasi precedenti e nel caso specifico della formula di Eulero anche di abilità aritmetiche per addizionare ed eventualmente sottrarre i numeri.

Obiettivi
- favorire l'immaginazione spaziale (la costruzione di un oggetto comporta, almeno in parte, una preliminare rappresentazione mentale di ciò che si vuole costruire);
- migliorare la capacità di espressione linguistica (è bene che i bambini parlino di Geometria in modo sempre più coerente, che tenga conto dell'uso corretto di molti termini della lingua naturale che troppo spesso sfuggono al controllo semantico, come la parola *almeno*);
- sviluppare la visione spaziale (la possibilità di osservare un diverso tipo di costruzione, permette un'apertura che favorisce il saper vedere sempre più con "gli occhi della mente");
- individuazione dei poliedri e delle loro proprietà (risulta più agevole focalizzare le proprietà dei singoli poliedri se si riesce a cogliere anche la parte di solido opposta alla posizione della propria visuale).
- fare matematica divertendosi (questo rimane sempre uno dei più importanti obiettivi da raggiungere, risulta infatti indispensabile far amare questa disciplina troppo spesso presentata in modo arido e formale).

Contenuti
Il laboratorio vuol favorire il primo approccio alla Geometria partendo dalle figure solide anziché da figure piane. Inoltre si individuano gli elementi che caratterizzano i poliedri: vertici, facce e spigoli e si trovano le relazioni che regolano questi enti.

Materiali
Stuzzicadenti di diverse lunghezze, pongo di differenti colori, eventualmente ceci e piselli, cannucce, nettapipe, cartoncino, forbici, pennarelli, materiali da disegno.

Tam Tam
Silvia Sbaragli fa parte del Nucleo di ricerca in didattica della matematica dell'Università di Bologna.

Bibliografia
D'Amore B. (a cura di). (1987). *Una mostra di matematica. Come rendere operativi i nuovi programmi della scuola elementare.* Teramo: Giunti e Lisciani.
D'Amore B. (1993). *Geometria.* Progetto Ma.S.E., volume V. Milano: Franco Angeli
D'Amore B. (2001). Che cos'è un laboratorio di matematica. *La Vita Scolastica,* 1. Firenze: Giunti.
Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2001). *Matematica di base per insegnanti in formazione*. Bologna: Pitagora.